Lineare Funktionen mit Parameter
Übung

1. Lesen Sie jeweils die Steigung sowie den y-Achsenabschnitt der zugehörigen Funktionen in Abhängigkeit von k ab. Es gilt jeweils $k \in \mathbb{R}$ und $D = \mathbb{R}$. •∘∘

   a) $f_k(x) = kx - 2$
   b) $g_k(x) = 3x + k - 1$
   c) $h_k(x) = k(x + 2) - 3k$,
   d) $i_k(x) = (x - 2k) + kx$,
   e) $j_k(x) = \frac{1}{4}(x + 2) + k$.

2. Geben Sie an, für welchen Wert des Parameters $a \in \mathbb{R}$ die beiden Geraden zueinander parallel sind. •∘∘

$$f_a(x) = (a - 1) \cdot x + 5$$
$$g(x) = 3x - 7$$

3. Bestimmen Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte des Graphen G_{f_b} mit den beiden Koordinatenachsen in Abhängigkeit von $b \in \mathbb{R}$.

$$f_b(x) = (b + 1) \cdot x + b + 1$$

4. Berechnen Sie die Nullstelle der linearen Funktion f_c in Abhängigkeit vom Parameter $c \in \mathbb{R}$.

$$f_c(x) = cx + 3 - 3x$$

5. Gegeben ist die reelle Funktion f_d durch $f_d(x) = (d - 2) \cdot x + 2d$ mit Definitionsmenge $D_{f_d} = \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{R}$.

   a) Berechnen Sie die Nullstelle von f_d in Abhängigkeit von d.
   b) Zeigen Sie: Der Punkt $P(-2; 4)$ liegt unabhängig von d auf jedem der Graphen von f_d.
   c) Berechnen Sie d so, dass der Punkt $Q(-1; 5)$ auf dem zugehörigen Graphen G_{f_d} liegt.

6. Durch $f_a: x \longmapsto f_a(x)$ mit $f_a(x) = \frac{1}{2}x + a$ ist eine lineare Funktion mit Parameter $a \in \mathbb{R}$ definiert.

   a) Zeichnen Sie die zugehörigen Graphen G_{f_a} für $a = 0$, $a = -2$ und $a = 1$.
   b) Geben Sie knapp Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Graphen von f_a an.
   c) Bestimmen Sie die Koordinaten von S_x und S_y, also der Schnittpunkte von G_{f_a} mit den Koordinatenachsen in Abhängigkeit von a.
   d) Berechnen Sie a so, dass der Punkt $A(4; 3)$ auf dem Graphen G_{f_a} liegt.

7. Bestimmen Sie die Schnittpunkte der folgenden Funktionsgraphen mit den Koordinatenachsen in Abhängigkeit vom jeweiligen Parameter $(a, b, c \in \mathbb{R})$.

   a) $f_a(x) = 3x - 6a$
   b) $f_b(x) = 2x - b^2 - bx + 4$
   c) $f_c(x) = c^2x - 2c^2 + 2cx + x + 1$

8. Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunkts der Graphen mit $f(x) = 4x - 1$ und $g_k(x) = 3kx - 2k$ abhängig von $k \in \mathbb{R}$.

9. Ein Geradenbüschel ist eine Menge an Geraden, die alle durch einen festen Punkt verlaufen. Geben Sie einen Funktionsterm des Geradenbüschels durch den Punkt $P(-2; 4)$ an.

10. Zu betrachten ist die lineare Funktion $f_k(x) = (k - 2) \cdot x + 8 - 3k$ mit $k \in \mathbb{R}$ und $D_{f_k} = \mathbb{R}$.

    a) Skizzieren Sie die Graphen von f_k für $k = 0$, $k = 1$ und $k = 3$.
    b) Berechnen Sie die Nullstelle von f_k in Abhängigkeit von k.
    c) Zeigen Sie: Der Punkt $P(3; 2)$ liegt auf allen Graphen von f_k.
    d) Ermitteln Sie den Wert von k, für den die zugehörige Funktion eine Nullstelle bei $x = 1$ besitzt.

11. Durch $f_a: x \longmapsto f_a(x)$ mit $f_a(x) = (a + 1) \cdot x + (a - 1)$ ist eine lineare Funktion mit Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$ und Parameter $a \in \mathbb{R}$ definiert. •••

    a) Zeichnen Sie die zugehörigen Graphen G_{f_a} für $a = 0$, $a = -2$ und $a = 1$.
    b) Entnehmen Sie Ihrem Graphen aus a) die Koordinaten des Punkts P, durch den alle Graphen G_{f_a} verlaufen. Beweisen Sie dies durch Rechnung.
    c) Bestimmen Sie die Koordinaten S_x und S_y der Schnittpunkte G_{f_a} mit den Koordinatenachsen in Abhängigkeit von a.
    d) Berechnen Sie a so, dass der Punkt $A(1; 4)$ auf dem Graphen G_{f_a} liegt.
    e) Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a die Koordinaten des Schnittpunkts S der Graphen G_{f_a} und G_g mit $g(x) = 2x - 1$. Welcher Schnittpunkt ergibt sich demnach für $a = 0$ bzw. für $a = 2$?

Lineare Funktionen mit Parameter
Lösung

1.

	Steigung	y-Achsenabschnitt
a)	$m_{f_k} = k$	$t_{f_k} = -2$
b)	$m_{g_k} = 3$	$t_{g_k} = k - 1$
c)	$m_{h_k} = k$	$t_{h_k} = -k$
d)	$m_{i_k} = k + 1$	$t_{i_k} = -2k$
e)	$m_{j_k} = \frac{1}{4}$	$t_{j_k} = k + \frac{1}{2}$

2. Die Steigungen der beiden Funktionsterme müssen gleich sein: $m_{f_a} = m_g$.
Mit $m_{f_a} = a - 1$ und $m_g = 3$ folgt $a - 1 = 3 \Rightarrow a = 4$

3. Schnittpunkt mit der x-Achse (Nullstelle): $f_b(x) = (b + 1) \cdot x + b + 1 = 0$
bzw. $(b + 1) \cdot x = -b - 1$

1. Fall: $b = -1$
$f_{-1}(x) = 0$
Die Funktion ist die x-Achse selbst, d.h. es existieren unendlich viele Nullstellen.

2. Fall: $x \neq -1$
$x = \frac{-b-1}{b+1} = \frac{-(b+1)}{b+1} = -1$
$S_x(-1; 0)$ ist unabhängig von b

Schnittpunkt mit der y-Achse liegt bei $S_y(0; b + 1)$

4. $f_c(x) = 0 \ \Rightarrow cx + 3 - 3x = 0 \ \Rightarrow x(c - 3) + 3 = 0$
1. Fall: keine Nullstelle für $c = 3$
2. Fall $c \neq 3 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{3-c}$

5.
a)

1. Fall: $d = 2$
$(2 - 2) \cdot x = -2 \cdot 2$
$0 = -4$
falsche Aussage $\Rightarrow$ keine Nullstelle
Das ist genau der Fall, wenn für die Steigung $m = 0$ gilt.

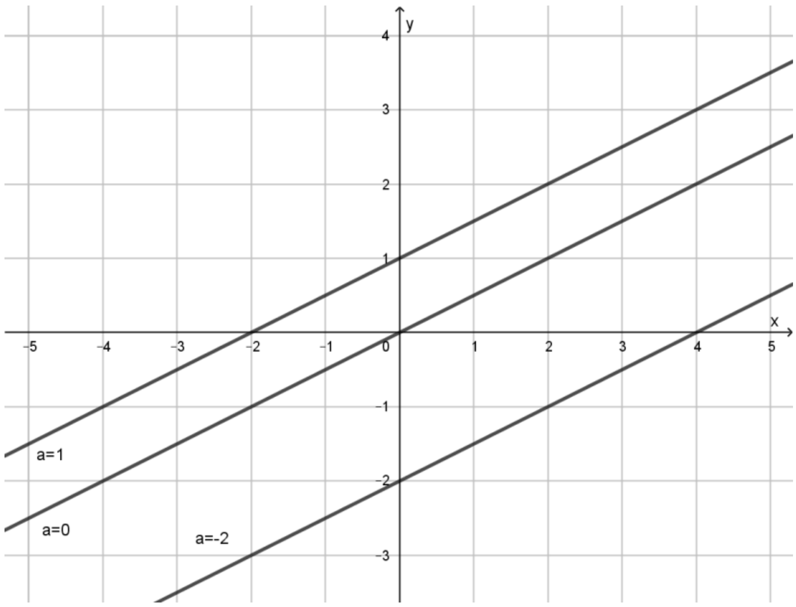
2. Fall: $d \neq -2$
$(a - 2) \cdot x = -2$
$x_1 = \frac{-2d}{d-2}$

b) $f_d(-2) = (d - 2) \cdot (-2) + 2d = 4$ ergibt mit $4 = 4$ stets eine wahre Aussage.

c) $f_d(-1) = 5$; $(a - 2) \cdot (-1) + 2d = 5$ bzw. $-d + 2 + 2d = 5$ liefert für $d = 3$ eine wahre Aussage.

6.

a)



b) Alle Graphen besitzen dieselbe Steigung und sind damit parallel. Sie unterscheiden sich durch einen unterschiedlichen y-Achsenabschnitt. Eine solche Funktion wird auch als **Parallelenschar** bezeichnet.

c) $S_x(-2a; 0)$; $S_y(0; a)$

d) A liegt auf dem Graphen für $a = 1$.

7.

a) $S_x(2a; 0)$, $S_y(0; -6a)$

b) 1. Fall $b = 2$: G_{f_b} ist parallel zur x-Achse, also kein Schnittpunkt mit dieser
2. Fall: $b \neq 2$: $S_x(b + 2; 0)$
$S_y(0; -b^2 + 4)$

c) 1. Fall $c = -1$: G_{f_c} ist parallel zur x-Achse
2. Fall $c \neq -1$: $S_x\left(\frac{-2c^2+1}{(c+1)^2}; 0\right)$
$S_y(0; -2c^2 + 1)$

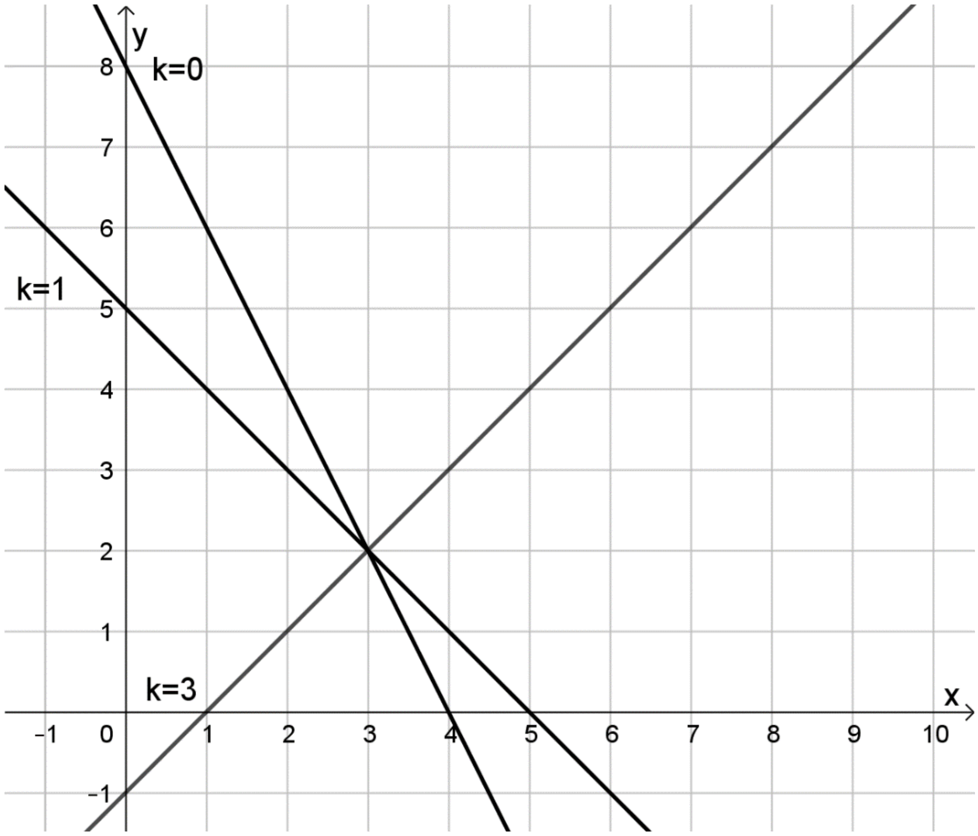
8.

Für $k = \frac{4}{3}$ sind f und $g_{\frac{4}{3}}$ parallel, d.h. es gibt keinen Schnittpunkt.
Für $k \neq \frac{4}{3}$ ist $S\left(\frac{1-2k}{4-3k}; \frac{-5k}{4-3k}\right)$

9. Die Menge aller Geradenbüschel durch den Punkt $P(x_0; y_0)$ kann durch den Term z.B. $f_k(x) = k(x - x_0) + y_0$ beschrieben werden. In diesem Fall ergibt sich also
$f_k(x) = k(x + 2) + 4 = kx + 2k + 4$

10.

a)



b) $x = \frac{8-3k}{k-2}$ für $k \neq 2$

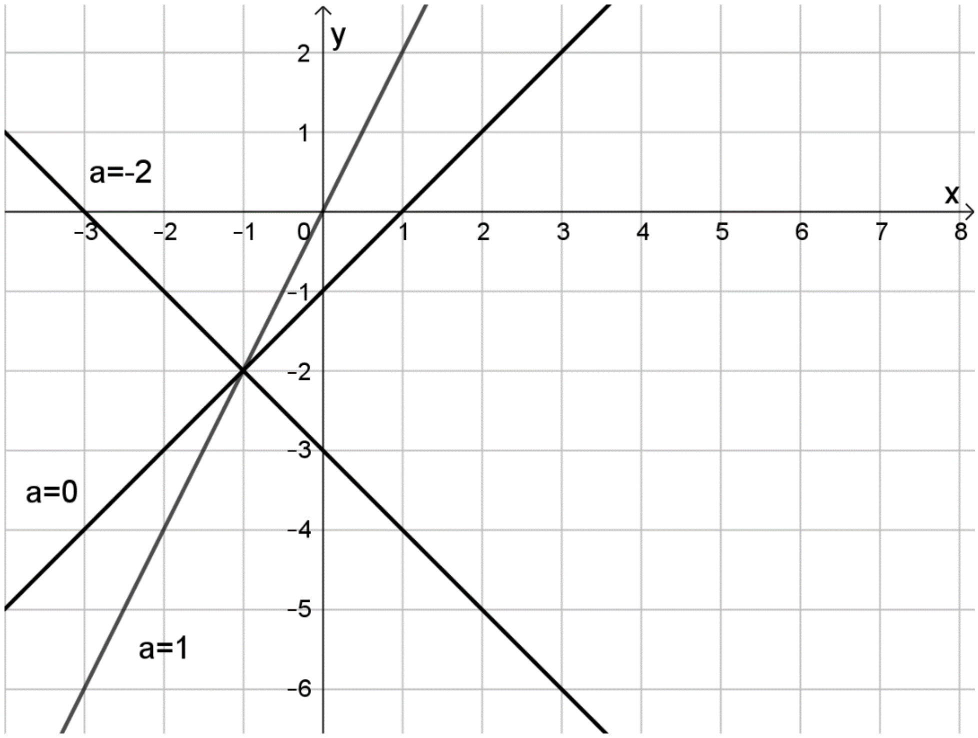
Für $k = 2$ ist der Gerade parallel zur x-Achse und besitzt keine Nullstelle.

c) Einsetzen von $P(3; 2)$ in $f_k(3) = 2$ liefert stets eine wahre Aussage.

d) $f_k(1) = 0$ ergibt $k - 2 + 8 - 3k = 0$ und damit $k = 3$.

11.

a)



b) $P(-1; -2)$, Einsetzen mit $f_a(-1) = -2$ ergibt eine wahre Aussage.

c) Für $a \neq -1$ ist $S_x\left(\frac{1-a}{1+a}; 0\right)$; für $a = -1$ gibt es keinen Schnittpunkt mit der x-Achse.
$S_y(0; a-1)$ ist unabhängig von a der Schnittpunkt mit der y-Achse.

d) $a = 2$

e) Für $a = 1$ sind die beiden Geraden parallel, es ergibt sich kein Schnittpunkt.
Für $a \neq 1$ ist $S_a\left(\frac{-a}{a-1}; \frac{-3a+1}{a-1}\right)$,
damit ist mit $a = 0$ $S_0(0; -1)$ und für $a = 2$ ist $S_2(-2; -5)$.